Polynomiality of Plancherel Averages on Strict Partitions (Combinatorics of Lie Type)

AUTHOR(S):

松本, 詔

CITATION:

松本, 詔. Polynomiality of Plancherel Averages on Strict Partitions (Combinatorics of Lie Type). 数理解析研究所講究録 2017, 2039: 59-78

ISSUE DATE:

2017-07

URL:

http://hdl.handle.net/2433/236888

数理解析研究所講究録
第2039巻 2017年 59-78

Polynomiality of Plancherel Averages on Strict Partitions

松本 詔 (Sho MATSUMOTO) [1 2]
鹿児島大学大学院理工学研究科
Graduate School of Science and Engineering
Kagoshima University

RIMS 研究集会「リー型の組合せ論」平成 28 年 10 月 3 日 〜 10 月 6 日

1 はじめに

1.1 分割に関する諸定義

まずは分割に関する記号を準備し, 基本的な事実を復習しよう. [岡田, Mac] を参考にされたい. 正の整数 n の分割とは, 正の整数の非増加列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l)$ のことである. $\ell(\lambda)=l$ と書き, これを λ の長さとよぶ. また $|\lambda|=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i=n$ と表し, これを λ の大きさという. 必要に応じて $i>\ell(\lambda)$ に対しては $\lambda_i=0$ と約束する. 便宜上, $\emptyset$ を 0 の唯一の分割とし, $|\emptyset|=0$, $\ell(\emptyset)=0$ と約束する. n の分割全体のなす集合を $\mathcal{P}_n$, 分割全体のなす集合を $\mathcal{P}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}_n$ と表す.

分割 λ に対して, 集合

$$Y(\lambda)=\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \mid 1\le i\le\ell(\lambda),\ 1\le j\le\lambda_i\}$$

を λ のヤング図形という. ヤング図形はしばしば例 1.1 のような図で表す. λ と $Y(\lambda)$ は同一視することが多いが, 後でシフト・ヤング図形も登場するので, ここではできるだけ区別することにしよう. また $Y(\lambda')=\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \mid (j,i)\in Y(\lambda)\}$ で定まる分割 $\lambda'=(\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots)$ を, λ の共役とよぶ.

λ を分割とするとき, 箱 $u=(i,j)\in Y(\lambda)$ に対して,

$$h_\lambda(u)=\lambda_i+\lambda'_j-i-j+1, \qquad c(u)=j-i$$

とおき, それぞれ λ の u における鉤の長さ (hook length), 容量 (content) とよぶ. 型 $Y(\lambda)$ の標準ヤング盤 (standard Young tableau) とは, $Y(\lambda)$ の箱の中に 1 から $|\lambda|$ までの数字を一つずつ入れて, 右へ行くほど, また下へ行くほど数字が大きくなるようにしたものである. 型が $Y(\lambda)$ の標準ヤング盤の個数を f^λ と表す.

[1] shom@sci.kagoshima-u.ac.jp
[2] 本研究は若手研究 (B) No.25800062 および 基盤研究 (B) No.24340003 の助成を受けたものです.

例 1.1. 分割 $\lambda = (4,2,2,1) \in \mathcal{P}_9$ を考える. 下は左から, λ のヤング図形, 鉤の長さの一覧, 容量の一覧, 標準ヤング盤の一例を表す.

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} & \\ \cline{1-2} \\ \cline{1-1} \end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 7 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 2 \\ \cline{1-2} 3 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1} \end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline -1 & 0 \\ \cline{1-2} -2 & -1 \\ \cline{1-2} -3 \\ \cline{1-1} \end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 9 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2} 6 & 8 \\ \cline{1-2} 7 \\ \cline{1-1} \end{array}
$$

例えば $u = (1,2) \in Y(\lambda)$ に対して, $h_\lambda(u) = 5$, $c(u) = 1$ である. □

次の公式はよく知られている (hook length formula):

$$f^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{u \in Y(\lambda)} h_\lambda(u)}. \tag{1.1}$$

また次の等式が成り立つ.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} (f^\lambda)^2 = n!. \tag{1.2}$$

等式 (1.2) は二つの解釈を持つ:

- 組合せ論的解釈. ロビンソン対応 (RSK 対応ともいう) の結果である. $1, 2, \ldots, n$ の置換 σ と, 同じ型 $\lambda (\in \mathcal{P}_n)$ を持つ標準ヤング盤のペア (P, Q) とは, 1 対 1 に対応する.
- 表現論的解釈. 対称群 S_n において, 分割 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対応する既約表現 V_λ の次元は f^λ で与えられる. $S_n \times S_n$ の表現の既約分解 $\mathbb{C}[S_n] \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_n} V_\lambda \boxtimes V_\lambda^\vee$ において, 両辺の次元を見ると (1.2) がしたがう.

1.2 Stanley の多項式性定理

分割 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して,

$$\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}(\lambda) = \frac{(f^\lambda)^2}{n!} \tag{1.3}$$

とおくと, (1.2) よりこれは $\mathcal{P}_n$ 上の確率測度を定める. この $\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}$ を（対称群 S_n の）プランシェレル測度 (Plancherel measure) とよぶ.

$\Lambda = \Lambda_{\mathbb{Q}}$ を, 有理数を係数にもつ対称関数全体とする. $\{x_i\}_{i \geq 1}$ を変数の列とするとき, べき和対称関数

$$p_k = p_k(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{i \geq 1} x_i^k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

が基本的である. Λ はこれらで生成される代数である: $\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$. また, $\{p_k\}_{k\geq 1}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的に独立である.

次の R.P. Stanley による定理が, この講究録の主題である.

定理 1.2 ([St]). $f \in \Lambda$ とする. このとき, 次で定める量は n の多項式である.

(1) (part evaluation) $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} \frac{(f^\lambda)^2}{n!} f(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 2, \dots, \lambda_n - n)$;

(2) (content evaluation) $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} \frac{(f^\lambda)^2}{n!} f(c(u) \,:\, u \in Y(\lambda))$;

(3) (hook-length evaluation) $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} \frac{(f^\lambda)^2}{n!} f(h_\lambda(u)^2 \,:\, u \in Y(\lambda))$.

ここで $f(c(u) \,:\, u \in Y(\lambda))$ は, 対称関数 $f = f(x_1, x_2, \dots)$ の最初の n 個の変数 x_i に $c(u)$ たちを代入し, 残りの変数を 0 としたものである. $f(h_\lambda(u)^2 \,:\, u \in Y(\lambda))$ も同様. [3]

いずれの量も, 「$\lambda \mapsto f(\lambda$ で決まる量$)$」の形の確率変数の, プランシェレル測度に関する平均に他ならない. よってこれらを総称してプランシェレル平均とよぶ.

例 1.3. 定理 *1.2* の *(2)*, $f = p_1^2$ の場合は,

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} \frac{(f^\lambda)^2}{n!} \left(\sum_{u\in Y(\lambda)} c(u) \right)^2$$

が n の多項式であることを意味する. 実際これは $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ で与えられる *([St, page 94])*. □

定理 1.2 に登場する概念はいずれも組合せ論において基本的であるが, 「n の多項式になる」という主張は決して自明ではない. 特に (3) において, $h_\lambda(u)^2$ を $h_\lambda(u)$ に置き換えると, 多項式性は成立しない. Olshanski [O] は定理 1.2(1),(2) の別証明を, shifted Schur function を用いて得ている. なお (3) は, (1) と (2) を用いて証明される.

この講究録の目的は, Olshanski [O] の手法を用いて, **定理 1.2 の strict 分割への類似を得ることである**. さらに次のような問題について考察する: 特別な対称関数 f を考えるとき, 定理 1.2 の strict 分割への類似に対して,

(i) n の多項式の明示的な形を求める.

(ii) 明示的な形が求まらなくても, 多項式の次数（の評価）を求める.

[3] f^λ と対称関数 f で記号がややこしいが, 混同の恐れはないだろう. f^λ は次章以降ほぼ登場しない.

1.3 行列積分との関連

なぜ定理 1.2 のようなプランシェレル平均を考えるのだろうか. 純粋に組合せ論的な等式を見つけること自体に興味があるが, content evaluation は次のように行列積分と関連していることに少しだけ触れておく. $\mathrm{U}(N)$ を N 次のユニタリ行列のなすリー群とし, dU をそのハール確率測度とする. $(u_{ij})_{1\le i,j\le N}$ を $\mathrm{U}(N)$ 上の座標関数とする. このとき $n<N$ に対し, 等式

$$\int_{\mathrm{U}(N)} |u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}|^2\, dU = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k N^{-n-k} \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} \frac{(f^\lambda)^2}{n!} h_k(c(u)\,:\,u\in Y(\lambda))$$

が成立する. ここで h_k は完全対称関数である. この等式は Weingarten calculus の文脈で現れる. 例えば [松本] を参照.

なお, ここの主題である strict 分割に対しては, このような行列積分との直接の関連は知られていない.

2 Shifted Plancherel averages

2.1 strict 分割に関する諸定義

strict 分割に対する記号を準備しよう. 分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_l)$ は $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_l>0$ を満たすとき, strict であるという. $\mathcal{SP}_n$ を n の strict 分割全体とし, $\mathcal{SP}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{SP}_n$ とおく.

strict 分割 λ に対しては, 通常, ヤング図形よりも次のシフト・ヤング図形を対応させる.

$$S(\lambda)=\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \mid 1\le i\le \ell(\lambda),\ i\le j\le \lambda_i+i-1\}.$$

箱 $u=(i,j)\in S(\lambda)$ に対して, $Y(\lambda)$ のときと同様に, u の容量を $c(u)=j-i$ で定義する. 容量はすべて非負になることに注意しよう. 鉤の長さの定義は当面必要なく, §5 で考える. 型が $S(\lambda)$ の標準ヤング盤の個数を, g^λ で表す.

例 2.1. 分割 $\lambda=(5,3,2)\in\mathcal{SP}_{10}$ を考える. 下は左から, λ のシフト・ヤング図形, 容量の一覧, 標準ヤング盤の一例を表す.

$$S(\lambda)=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline &&&&\\ \hline \multicolumn{1}{c|}{}&&&&\multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{c}{}&\multicolumn{1}{c|}{}&&&\multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{3-4}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&3&4\\ \hline \multicolumn{1}{c|}{}&0&1&2&\multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{c}{}&\multicolumn{1}{c|}{}&0&1&\multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{3-4}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&4&5&8\\ \hline \multicolumn{1}{c|}{}&3&6&9&\multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{c}{}&\multicolumn{1}{c|}{}&7&10&\multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{3-4}\end{array}$$

□

つぎの等式が成り立つ.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} 2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2 = n!. \tag{2.1}$$

これは (1.2) の「strict 版」(もしくは「射影版」,「スピン版」) であり, 次の二つの解釈を持つ. 詳細は [HH] を参照.

- 組合せ論的解釈. シフト・ロビンソン対応 (shifted RSK 対応) の結果である.
- 表現論的解釈. 対称群 S_n の射影表現は, スピン対称群の線形表現に対応する. スピン対称群の「負の既約表現」の次元を考えることで (2.1) が得られる.

2.2 Part evaluation

strict 分割 $\lambda \in \mathcal{SP}_n$ に対して,

$$\mathbb{P}_n^{\mathrm{SPl}}(\lambda) = \frac{2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{n!} \tag{2.2}$$

とおくと, (2.1) よりこれは $\mathcal{SP}_n$ 上の確率測度を定める. この $\mathbb{P}_n^{\mathrm{SPl}}$ をシフト・プランシェレル測度 (shifted Plancherel measure) とよぶ. 文脈で $\mathbb{P}_n^{\mathrm{Plan}}$ と区別できるときは, $\mathbb{P}_n^{\mathrm{SPl}}$ も単にプランシェレル測度とよぶ.

$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{Q}}$ を, $\{p_{2r+1}\}_{r=0,1,2,\ldots}$ で生成される Λ の部分 $\mathbb{Q}$-代数とする. $f \in \Lambda$ と $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) \in \mathcal{SP}$ に対し,

$$f(\lambda) = f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$$

と書くことにする. 例えば $p_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^k$.

次の定理は, 定理 1.2(1) の類似に相当する.

定理 2.2 ([M]). $F \in \Gamma$ とする. このときプランシェレル平均

$$\mathbb{E}_n[F] := \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} \mathbb{P}_n^{\mathrm{SPl}}(\lambda) F(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} \frac{2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{n!} F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$$

は n の多項式である.

例 2.3. 具体的に次のように書ける. ただし, *1* つ目の等式は自明である.

$$\mathbb{E}_n[p_1] = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} \frac{2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{n!} \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i = n.$$

$$\mathbb{E}_n[p_3] = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} \frac{2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{n!} \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i^3 = 6\binom{n}{2} + \binom{n}{1}.$$

$$\mathbb{E}_n[p_5] = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} \frac{2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{n!} \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i^5 = 80\binom{n}{3} + 30\binom{n}{2} + \binom{n}{1}.$$

あとで示すように, $\mathbb{E}_n[p_{2k+1}]$ は n の（高々）$k+1$ 次の多項式となる. □

注意 2.4. $F \in \Gamma$ という仮定は本質的である. 実際, $\mathbb{E}_n[p_2]$ は n の多項式になりそうにない. $\mathbb{E}_n[p_2]$ を n の明示的な関数で記述することは興味深い問題である. □

定理 2.2 の証明の概略を §3 で与える.

注意 2.5. 定理 *2.2* は次のように少しだけ一般化できる. $\mu \in \mathcal{SP}_m$ を固定する. 分割 $\lambda \in \mathcal{SP}_{n+m}$ が $S(\lambda) \supset S(\mu)$ を満たすとき, 型が $S(\lambda/\mu) := S(\lambda) \setminus S(\mu)$ の標準ヤング盤の個数を $g^{\lambda/\mu}$ で表す. $S(\lambda) \not\supset S(\mu)$ のときは $g^{\lambda/\mu} = 0$ とおく. このとき, 任意の $F \in \Gamma$ に対して,

$$\mathbb{E}_{\mu,n}[F] := \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_{n+m}} \frac{m!}{(n+m)!} 2^{n-\ell(\lambda)+\ell(\mu)} \frac{g^\lambda}{g^\mu} g^{\lambda/\mu} F(\lambda)$$

が n の多項式となる. ここで $\mu = \emptyset$ のときが定理 *2.2* に他ならない. $\mathbb{E}_{\mu,n}[1] = 1$ が言えるので, シフト・プランシェレル測度を少し拡張した確率分布で平均を取っていることになる. これに応じて, 後述の定理 *2.6* も拡張されるが, その拡張版が *[HX1]* の主結果に他ならない.

2.3 Content evaluation

ごく最近, strict 分割のプランシェレル平均について, Han-Xiong [HX1] は次の定理を得た. これは定理 1.2(2) の類似に相当する.

定理 2.6 ([HX1, M]). $f \in \Lambda$ とする. このとき

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} \frac{2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{n!} f\left(\widehat{c}(u) \,:\, u \in S(\lambda)\right)$$

は n の多項式である．ここで

$$\widehat{c}(u)=\frac{1}{2}c(u)(c(u)+1)$$

とおいた．

なぜ容量 $c(u)$ ではなく $\widehat{c}(u)$ が登場するのだろうか．[HX1] ではその理由は述べられていないが, つぎのような意味付けができる．

- 分割 $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対し, S_n の既約表現 V_λ を考える．Jucys–Murphy elements の V_λ への作用を考えると, $\{c(u)\}_{u\in Y(\lambda)}$ がそのスペクトルとなることが知られている．
- 一方, strict 分割 $\lambda\in\mathcal{SP}_n$ に対し, スピン対称群の負の既約表現を考えると, spin Jucys–Murphy elements のスペクトルとして $\{\widehat{c}(u)\}_{u\in S(\lambda)}$ が登場する．[VS] を参照．

ここでは定理 2.2 を柱として, 定理 2.6 の別証明を与えよう．実は, 次の定理 2.7 のもとで, 定理 2.6 と定理 2.2 は同値である．

定理 2.7 ([M]). 代数 Γ は, 関数

$$\mathcal{SP}\ni\lambda\mapsto|\lambda|,\qquad \mathcal{SP}\ni\lambda\mapsto f(\widehat{c}(u)\,:\,u\in S(\lambda))$$

（ただし $f\in\Lambda$）で生成される代数と一致する．

つまり, 任意の $f\in\Lambda$ に対して, $F(\lambda_1,\dots,\lambda_l)=f(\widehat{c}(u)\,:\,u\in S(\lambda))$ $(\forall\lambda\in\mathcal{SP})$ となるような $F\in\Gamma$ が一意的に存在する．この F を $\widehat{f}$ で表そう．すなわち

$$\widehat{f}(\lambda)=f(\widehat{c}(u)\,:\,u\in S(\lambda))\qquad(\lambda\in\mathcal{SP}).$$

対応 $f\mapsto\widehat{f}$ を具体的に記述するのは, 一般に容易ではない．

定理 2.7 の証明の前に, 簡単に計算できる例を見よう．

例 2.8. 初等的な計算により

$$\begin{aligned}p_1(\widehat{c}(u)\,:\,u\in S(\lambda))=&\sum_{u\in S(\lambda)}\frac{c(u)(c(u)+1)}{2}=\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)}\sum_{j=1}^{\lambda_i}\frac{(j-1)j}{2}\\=&\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)}(\lambda_i^3-\lambda_i)=\frac{1}{6}(p_3(\lambda)-p_1(\lambda))\end{aligned}$$

となることが分かる．すなわち

$$\widehat{p_1}=\frac{1}{6}(p_3-p_1)\quad\in\Gamma.$$

□

定理 *2.7* の証明の概略. 少し面倒であるが,

$$p_{2m+1} = 2^m(2m+1)\widehat{p}_m + \sum_{r=0}^{m-1} a_{mr}\widehat{p}_r \qquad (a_{mr} \in \mathbb{Q},\ m = 1, 2, \dots)$$

の形で書けることが証明できる ([M]). ただし, $\widehat{p}_0(\lambda) = \sum_{u \in S(\lambda)} 1 = |\lambda| (= p_1(\lambda))$ と約束する. この線形方程式系を逆に解くと,

$$\widehat{p}_k = \frac{1}{2^k(2k+1)} p_{2k+1} + \sum_{r=0}^{k-1} b_{kr} p_{2r+1} \qquad (b_{kr} \in \mathbb{Q},\ k = 0, 1, 2, \dots) \tag{2.3}$$

の形で書けることになる. したがって関数 $\widehat{p}_k(\lambda) = p_k(\widehat{c}(u) : u \in S(\lambda))$ は Γ に属する. □

例 2.9. 例 *2.8* と同様にして, $\widehat{p}_2 = \frac{1}{20}p_5 - \frac{1}{12}p_3 + \frac{1}{30}p_1$ と書ける. 例 *2.3* を用いて,

$$\mathbb{E}_n[\widehat{p}_1] = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} \frac{2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{n!} \sum_{u \in S(\lambda)} \widehat{c}(u) = \binom{n}{2},$$

$$\mathbb{E}_n[\widehat{p}_2] = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} \frac{2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{n!} \sum_{u \in S(\lambda)} \widehat{c}(u)^2 = 4\binom{n}{3} + \binom{n}{2}.$$

を得る. □

あとで次のような等式が成り立つことも見る（命題 4.11）:

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} \frac{2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{n!} \sum_{u \in S(\lambda)} \prod_{i=1}^{r} \left\{\widehat{c}(u) - \binom{i}{2}\right\} = \frac{(2r)!}{((r+1)!)^2} n^{\downarrow(r+1)} \qquad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

3 (Factorial) Schur Q-functions

定理 2.2 の証明について述べよう. 主な道具は factorial Schur Q-関数である. まずは（通常の）Schur Q-関数について述べよう. 詳細は [Mac, III-8] を参照されたい.

定義 3.1. $\lambda \in \mathcal{SP}$ とし, $l = \ell(\lambda)$ とおく. $N \geq l$ のとき, N 変数 *Schur* P-多項式 $P_{\lambda|N}(x_1, \dots, x_N)$ をつぎで定義する.

$$P_{\lambda|N}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(N-l)!} \sum_{w \in S_N} w\left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_l^{\lambda_l} \prod_{i=1}^{l} \prod_{j=i+1}^{N} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right).$$

ここで置換 w は変数 $x_1, \dots, x_N$ の入れ換えとして作用する. $N < l$ のときは $P_{\lambda|N}(x_1, \dots, x_N) = 0$ と約束する. いつものように射影極限 $\varprojlim P_{\lambda|N}$ によって, 対称関数 P_λ が定まる. これを *Schur* P-関数とよぶ. また $Q_\lambda := 2^{\ell(\lambda)} P_\lambda$ を, *Schur* Q-関数とよぶ.

Schur P-関数は, Hall-Littlewood 関数 $P_\lambda(t)$ の $t=-1$ の場合に対応する. なお $P_\lambda(t=0)$ は Schur 関数 s_λ に他ならない. 次の事実はよく知られている [Mac, III, (8.9)].

命題 3.2. $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{SP}}$ は Γ の基底をなす.

次に factorial Schur Q-関数について述べる. 1 変数 x と正の整数 k に対し,

$$x^{\downarrow k}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$$

と定める. また $x^{\downarrow 0}=1$ と約束する. 次の factorial Schur P-/Q-関数は A. Okounkov により導入され [I] で初めて登場する.

定義 3.3 ([I]). $\lambda\in\mathcal{SP}$ とし, $l=\ell(\lambda)$ とおく. $N\geq l$ のとき, N 変数 *factorial Schur* P-*多項式* $P^*_{\lambda|N}(x_1,\ldots,x_N)$ *をつぎで定義する.*

$$P^*_{\lambda|N}(x_1,\ldots,x_N)=\frac{1}{(N-l)!}\sum_{w\in S_N}w\left(x_1^{\downarrow\lambda_1}\cdots x_l^{\downarrow\lambda_l}\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=i+1}^{N}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right).$$

$N<l$ *のときは* $P^*_{\lambda|N}(x_1,\ldots,x_N)=0$ *と約束する. 射影極限* $\varprojlim P^*_{\lambda|N}$ *によって, 対称関数* P^*_λ *が定まる. これを factorial Schur* P-*関数とよぶ. また* $Q^*_\lambda:=2^{\ell(\lambda)}P^*_\lambda$ *を, factorial Schur* Q-*関数とよぶ.*

命題 3.4 ([I]). *Factorial Schur* P-*関数* P^*_λ *は次を満たす.*

(i) P^*_λ *は* Γ *に属する.*

(ii) $P^*_\lambda=P_\lambda+g$ *の形で書ける. ただし* $g\in\Gamma$ *は (§4.1 の意味での) 次数が* $|\lambda|$ *未満である. すなわち,* P^*_λ *の最高次の部分が* P_λ *である.*

その他にも P^*_λ は, P_λ と似た, もしくは別種の性質を多く持つことが知られている. たとえば命題 3.2 と命題 3.4 より, $\{P^*_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{SP}}$ は Γ の基底をなす. したがって, 定理 2.2 を示すには, $\mathbb{E}_n[P^*_\lambda]$ が n の多項式であることを示せば十分である. その場合は次のように明示的な結果を得ることができる.

命題 3.5. 任意の $\nu\in\mathcal{SP}_k$ に対し,

$$\mathbb{E}_n[P^*_\nu]=2^{k-\ell(\nu)}g^\nu\binom{n}{k}.$$

証明の詳細は [M] の議論から分かるが, [O, Theorem 3.3] の証明と全く同様である. 与えられた $f\in\Gamma$ に対して, $\mathbb{E}_n[f]$ を具体的に求めたい場合, 上の命題より, f を基底 $\{P^*_\nu\}$ で展開すれば良い. もちろん一般にそれは容易ではないが, 低次では十分に威力を発揮する. 実際, 例 2.3 の式はそのような計算で求まる.

注意 3.6. *Schur* 関数 s_λ に対し, *shifted Schur function* s^*_λ が知られている. P^*_λ はその定義から, s^*_λ の「*strict* 版」にあたるので, 「*shifted Schur P-function*」とようなものである. s^*_λ は変数 $\mathbf{x} = (x_i)$ の対称関数ではなく, $y_i := x_i - i$ に関して対称な, いわゆる *shifted symmetric function* になっている. 一方で, P^*_λ は P_λ と同じ空間 Γ に属しており, *shifted symmetric* ではないので「*shifted Schur P-function*」という名称はこの意味で妥当ではない.

文献 *[I]* では特に名前が付いていなかったが, ここでは P^*_λ を *factorial Schur P-function* と呼んだ. しかしながら, 「*factorial Schur P-function*」という名称は, より一般の $P_\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{a})$ という関数に用いられることもあるので注意が必要である. パラメータ $\mathbf{a} = (a_i)_{i\geq 1}$ を $a_i = i - 1$ と特殊化することで, $P_\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{a})$ は P^*_λ に一致する.

4 次数の評価

定理 2.2 により, 任意の $f \in \Gamma$ に対して $\mathbb{E}_n[f]$ は n の多項式になる. 前章で述べたように, 一般に $\mathbb{E}_n[f]$ の具体的な形を記述するのは難しい問題である. そこで, ここでは $\mathbb{E}_n[f]$ の n の多項式としての次数を評価することを考えよう. 3 通りの次数の評価を考える.

4.1 第 1 の次数

まず代数 Λ には自然な次数 deg が定義されている. すなわち, べき和対称関数 $p_k = \sum_{i\geq 1} x_i^k$ に対して

$$\deg p_k = k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

と定まる.

命題 4.1. $f \in \Gamma$ とする. n の多項式 $\mathbb{E}_n[f]$ の次数は, 高々 $\deg f$ である.

証明. $(P^*_\nu)_{\nu\in\mathcal{SP}}$ は Γ の基底をなすので, $f = P^*_\nu$ のときに主張を示せば十分である. しかしその場合は命題 3.5 より直ちにしたがう. □

命題 4.1 によれば, n の多項式 $\mathbb{E}_n[p_3]$ の次数は, 高々 3 である. ところが例 2.3 より, 実際の $\mathbb{E}_n[p_3]$ の次数は 2 である. このように命題 4.1 の評価は最良とは限らないため, deg 以外の次数を Γ に導入する必要がある.

4.2 第2の次数

分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathcal{P}$ は, 全ての $\lambda_i > 0$ が奇数であるとき, odd であるという. n の odd 分割全体を $\mathcal{OP}_n$ とし, $\mathcal{OP} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{OP}_n$ とおく. よく知られているように, $|\mathcal{SP}_n| = |\mathcal{OP}_n|$ が成立する. 一般の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathcal{P}$ に対し, $p_\lambda = p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_l}$ と定めるのだった. このとき $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ は Λ の, $\{p_\rho\}_{\rho \in \mathcal{OP}}$ は Γ の, それぞれ基底をなす.

$\rho \in \mathcal{OP}_k$ とする. p_ρ を $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{SP}_k}$ で展開したときの係数を X_ρ^λ で表す. すなわち

$$p_\rho = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_k} X_\rho^\lambda P_\lambda.$$

次のように定義される対称関数 $\mathfrak{p}_\rho$ を導入しよう.

定義 4.2. $\rho \in \mathcal{OP}_k$ に対し,

$$\mathfrak{p}_\rho = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_k} X_\rho^\lambda P_\lambda^*$$

と定義する.

べき和対称関数 p_ρ と異なり, 一般には $\mathfrak{p}_\rho \neq \mathfrak{p}_{(\rho_1)} \cdots \mathfrak{p}_{(\rho_l)}$ であることに注意せよ. つぎの命題は命題 3.5 と同値であることが確かめられる [M, Corollary 4.3].

命題 4.3. $\rho \in \mathcal{OP}_k$ に対し, $\mathbb{E}_n[\mathfrak{p}_\rho] = \delta_{\rho,(1^k)} n^{\downarrow k}$ が成り立つ.

例 4.4. p_3 は

$$p_3 = \mathfrak{p}_{(3)} + 3\mathfrak{p}_{(1^2)} + \mathfrak{p}_{(1)}$$

と展開されるので, $\mathbb{E}_n[p_3] = 3n^{\downarrow 2} + n$ がただちにしたがう. □

$\{\mathfrak{p}_\rho\}_{\rho \in \mathcal{OP}}$ が Γ の基底となることに注意して, Γ に次のような次数 $\deg_1$ を定義しよう.

$$\deg_1 \mathfrak{p}_\rho = |\rho| + m_1(\rho), \qquad \rho \in \mathcal{OP}.$$

ここで, $m_1(\rho) = |\{i \geq 1 \mid \rho_i = 1\}|$ である. このとき次の命題を得る.

命題 4.5. $f \in \Gamma$ とする. $\mathbb{E}_n[f]$ の次数は, 高々 $\frac{1}{2}\deg_1(f)$ である.

証明. $f = \mathfrak{p}_\rho$ のときに主張を示せば十分である. $k = |\rho|$ とし, 命題 4.3 を用いる. $\rho = (1^k)$ のとき, $\mathbb{E}_n[\mathfrak{p}_\rho] = n^{\downarrow k}$ かつ $\deg_1 \mathfrak{p}_\rho = 2k$ である. 一方, $\rho \neq (1^k)$ のとき, $\mathbb{E}_n[\mathfrak{p}_\rho] = 0$ である. □

もちろん, 一般に, 与えられた $f \in \Gamma$ を基底 $\{\mathfrak{p}_\rho\}$ で展開することは容易ではない.

注意 4.6. 係数 X^λ_ρ $(\lambda \in \mathcal{SP}_k, \rho \in \mathcal{OP}_k)$ は, 対称群の指標値 χ^ξ_η $(\xi, \eta \in \mathcal{P}_k)$ の「スピン版」に相当する. 実際, X^λ_ρ はスピン対称群の指標値を与える. 対称関数 $\mathfrak{p}_\rho$ は次の表示を持つ *[M, Proposition 3.2]:*

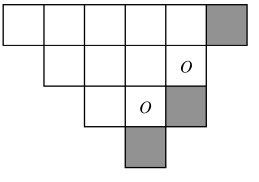
$$\mathfrak{p}_\rho(\mu) = \begin{cases} n^{\downarrow k} \cdot \frac{X^\mu_{\rho \cup (1^{n-k})}}{g^\mu} & (n = |\mu| \geq k) \\ 0 & (n = |\mu| < k) \end{cases} \qquad (\mu \in \mathcal{SP}).$$

したがって $\mathfrak{p}_\rho$ は正規化されたスピン既約指標であると言える. □

4.3 第 3 の次数

strict 分割 λ のシフト・ヤング図形 $S(\lambda)$ を考える. 箱 $u = (i, j) \in S(\lambda)$ は, $S(\lambda)$ から u を除いても strict 分割を定めるとき, λ の outer corner という. また箱 $u = (i, j) \notin S(\lambda)$ は, $S(\lambda)$ に u を追加すると strict 分割を定めるとき, λ の inner corner という. $\mathbb{O}_\lambda$ と $\mathbb{I}_\lambda$ で, それぞれ λ の outer corner と inner corner 全体を表す.

例 4.7. $\lambda = (5, 4, 2) \in \mathcal{SP}_{11}$ を考える. このとき, $\mathbb{O}_\lambda = \{(2, 5), (3, 4)\}$, $\mathbb{I}_\lambda = \{(1, 6), (3, 5), (4, 4)\}$ となる. 図で o と書いてある箱が *outer corner* である. $S(\lambda)$ から *outer corner* を取ると, それぞれ *strict* 分割 $(5, 3, 2), (5, 4, 1) \in \mathcal{SP}_{10}$ を得る. 一方, 灰色の箱が *inner corner* である. $S(\lambda)$ に *inner corner* を加えると, それぞれ $(6, 4, 2), (5, 4, 3), (5, 4, 2, 1) \in \mathcal{SP}_{12}$ を得る.



□

定義 4.8 ([HX1])**.** 整数 $k \geq 1$ に対し, $\mathcal{SP}$ 上の関数 ψ_k を

$$\psi_k(\lambda) = \sum_{u \in \mathbb{I}_\lambda} \{c(u)(c(u)+1)\}^k - \sum_{u \in \mathbb{O}_\lambda} \{c(u)(c(u)+1)\}^k$$

で定める. ここで $c(u)$ は容量である. 任意の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathcal{P}$ に対し,

$$\psi_\lambda = \psi_{\lambda_1} \psi_{\lambda_2} \cdots \psi_{\lambda_l}$$

と定める.

命題 4.9 (Proposition 6.2, [M]). 各 k に対し, $\psi_k \in \Gamma$ である. 実際,

$$\psi_k(\lambda) = 2 \sum_{\substack{1 \le s \le k, \\ \text{odd}}} \binom{k}{s} p_{2k-s}(\lambda) \tag{4.1}$$

とかける. したがって定理 *2.2* より, $\mathbb{E}_n[\psi_k]$ は n の多項式である.

(4.1) の表示から $\{\psi_k\}_{k \ge 1}$ は代数的に独立であり, 代数 Γ を生成する. そこで我々はつぎのような次数 $\deg'$ を導入する.

$$\deg' \psi_k \doteq k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

これは deg とは異なることに注意しよう. 実際, $\psi_k = 2kp_{2k-1} + \cdots$ の表示より $\deg \psi_k = 2k-1$ である. また, (4.1) より

$$\deg' p_{2k-1} = k$$

であることもわかる.

つぎの命題は, 本質的に [HX1] により得られているが, われわれの記号に整理するために証明の概略を §4.4 に記載する.

命題 4.10. $f \in \Gamma$ とする. n の多項式 $\mathbb{E}_n[f]$ の次数は, 高々 $\deg' f$ である.

この命題を用いて, 次の等式 ([HX1, Theorem 1.2]) を示そう.

命題 4.11. 関数 U_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ を

$$U_r(\lambda) = \sum_{u \in S(\lambda)} \prod_{k=-r+1}^{r} (c(u) + k) \qquad (\lambda \in \mathcal{SP})$$

と定めるとき,

$$\mathbb{E}_n[U_r] = \frac{2^r (2r)!}{((r+1)!)^2} n^{\downarrow(r+1)}. \tag{4.2}$$

証明. まずは $U_r \in \Gamma$ かつ $\deg'(U_r) = r+1$ であることを示そう.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=-r+1}^{r} (c(u) + k) &= \prod_{i=1}^{r} \{(c(u) + i)(c(u) - i + 1)\} \\
&= \prod_{i=1}^{r} \{c(u)(c(u) + 1) - i(i-1)\} = 2^r \prod_{i=1}^{r} \{\widehat{c}(u) - \binom{i}{2}\}
\end{aligned}$$

なので,

$$U_r = 2^r \widehat{p}_r + (\widehat{p}_0, \ldots, \widehat{p}_{r-1} \text{ の線形結合}) \\ = \frac{1}{2r+1} p_{2r+1} + (p_1, p_3, \ldots, p_{2r-1} \text{ の線形結合}) \quad (\because (2.3))$$

を得る．よって，$U_r \in \Gamma$ かつ $\deg'(U_r) = r+1$ となる．命題4.10から，$\mathbb{E}_n[U_r]$ は高々$r+1$ 次の n の多項式であることが分かった．

そこで，$n = 0, 1, \ldots, r+1$ のときに等式(4.2)が成立することを確認すれば，全ての n で(4.2)は成立する．

- $n \le r$ とし，$\lambda \in \mathcal{SP}_n$ とする．このとき各々の容量 $c(u)$ $(u \in S(\lambda))$ は $0 \le c(u) \le n-1 \le r-1$ を満たすので，$U_r(\lambda) = 0$ となる．したがって，(4.2)の左辺は0．$n \le r$ より $n^{\downarrow(r+1)} = 0$ で，(4.2)の右辺も0．

- $n = r+1$ とし，$\lambda \in \mathcal{SP}_n$ とする．上と同様に，$\lambda \neq (r+1)$ のときは $U_r(\lambda) = 0$ となる．また $\lambda = (r+1)$ のときの容量は，$0, 1, \ldots, r$ で，$U_r((r+1)) = \prod_{k=-r+1}^{r} (r+k) = (2r)!$ となる．したがって，

$$\mathbb{E}_{r+1}[U_r] = \left[\frac{2^{r+1-\ell(\lambda)} (g^\lambda)^2}{(r+1)!} U_r(\lambda) \right]_{\lambda=(r+1)} = \frac{2^r (2r)!}{(r+1)!} = \left[\frac{2^r (2r)!}{((r+1)!)^2} n^{\downarrow(r+1)} \right]_{n=r+1}$$

となり，(4.2)が $n = r+1$ のときも成立する．

□

4.4 命題 4.10 の証明

ここでの議論は Olshanski [O] のアイディアと全く同じである．ふたつの strict 分割 λ, μ に対し，$S(\lambda)$ に箱を一つだけ加えて $S(\mu)$ が得られるとき（つまり $S(\mu) \setminus S(\lambda) = \{v\}$ かつ $v \in \mathbb{I}_\lambda \cap \mathbb{O}_\mu$ のとき），$\mu \searrow \lambda$ と書こう．このとき

$$p^\uparrow(\lambda, \mu) = \frac{g^\mu}{g^\lambda} \frac{2^{\delta(\ell(\mu)-\ell(\lambda))}}{|\lambda|+1}$$

と定義する．ここで，

$$\delta(\ell(\mu) - \ell(\lambda)) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ell(\mu) = \ell(\lambda), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおいた．$\mu \searrow \lambda$ でないときは $p^\uparrow(\lambda, \mu) = 0$ と約束する．

この $p^{\uparrow}(\cdot,\cdot)$ を, シフト・プランシェレル測度 $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n^{\mathrm{SPl}}$ の推移確率という. 名前の由来はつぎの等式による ([B]):

$$\mathbb{P}_{n+1}(\mu) = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n : \mu \searrow \lambda} \mathbb{P}_n(\lambda) p^{\uparrow}(\lambda, \mu) \qquad (\mu \in \mathcal{SP}_{n+1}). \tag{4.3}$$

$\mathcal{SP}$ 上の関数のなす空間に, '微分' 作用素 ∂ をつぎの式で定義する: 関数 F に対し,

$$(\partial F)(\lambda) = -F(\lambda) + \sum_{\mu : \mu \searrow \lambda} p^{\uparrow}(\lambda, \mu) F(\mu).$$

このとき

$$\mathbb{E}_{n+1}[F] = \mathbb{E}_n[F + \partial F] \tag{4.4}$$

が成り立つ. 実際,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_n[F + \partial F] &= \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} \mathbb{P}_n(\lambda)(F(\lambda) + (\partial F)(\lambda)) \\
&= \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} \mathbb{P}_n(\lambda) \sum_{\mu : \mu \searrow \lambda} p^{\uparrow}(\lambda, \mu) F(\mu) \\
&= \sum_{\mu \in \mathcal{SP}_{n+1}} F(\mu) \sum_{\lambda : \mu \searrow \lambda} \mathbb{P}_n(\lambda) p^{\uparrow}(\lambda, \mu) \\
&= \sum_{\mu \in \mathcal{SP}_{n+1}} F(\mu) \mathbb{P}_{n+1}(\mu) \qquad (\because (4.3)) \\
&= \mathbb{E}_{n+1}[F].
\end{aligned}$$

補題 4.12. $\eta \in \mathcal{P}_k$ とする. このとき $\partial \psi_\eta$ は ψ_ξ $(\xi \in \mathcal{P}, |\xi| < k)$ たちの線形結合である.

証明. 微分作用素 ∂ は, [HX1] における微分作用素 D と本質的に同じものである. そのことに注意すると, この主張は [HX1, Theorem 3.6] の言い換えに他ならない. □

命題 *4.10* の証明. $\{\psi_\eta\}_{\eta \in \mathcal{P}}$ は Γ の基底をなすことを思い出そう. $\mathbb{E}_n[\psi_\eta]$ の次数が $|\eta|$ 以下であることを示せば十分である. $k := |\eta|$ についての帰納法で示そう. まず $\mathbb{E}_n[\psi_1] = \mathbb{E}_n[2p_1] = 2n$ なので, $k = 1$ のとき主張は正しい.

つぎに $k - 1$ まで主張が正しいと仮定し, η を k の任意の分割としよう. このとき,

- 補題 4.12 と帰納法の仮定から, $\mathbb{E}_n[\partial \psi_\eta]$ は高々$k - 1$ 次の n の多項式である.
- 一方 (4.4) より, 等式 $\mathbb{E}_{n+1}[\psi_\eta] - \mathbb{E}_n[\psi_\eta] = \mathbb{E}_n[\partial \psi_\eta]$ がすべての n で成立する.

上の二つの事実は, n の多項式 $\mathbb{E}_n[\psi_\eta]$ の次数が k 以下であることを要求している. 実際, もし

$$\mathbb{E}_n[\psi_\eta] = an^p + bn^{p-1} + [\text{terms of degree} < p-1], \qquad (a \neq 0,\ p > k)$$

の形ならば,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n[\partial\psi_\eta] =&\mathbb{E}_{n+1}[\psi_\eta] - \mathbb{E}_n[\psi_\eta]\\ =&a\{(n+1)^p - n^p\} + b\{(n+1)^{p-1} - n^{p-1}\} + [\text{terms of degree} < p-1]\\ =&apn^{p-1} + [\text{terms of degree} < p-1]\end{aligned}$$

となるが, 最後の式は $p-1(>k-1)$ 次となり, $\mathbb{E}_n[\partial\psi_\eta]$ が $k-1$ 次であることに反する. 以上により帰納法が完了する. □

4.5 次数の評価のまとめ

この章で, われわれは

$$\mathbb{E}_n[f] \text{ の次数} \quad \leq \quad \min\left\{\deg f,\ \frac{\deg_1 f}{2},\ \deg' f\right\}$$

という評価を得た. 右辺のどれが最良となるかは考える f によって異なるので, 使い分ける必要がある.

5 Hook evaluation

5.1 strict 分割の鉤

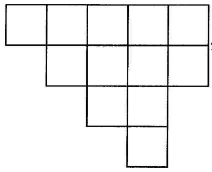
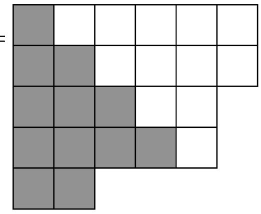
定理 2.2 および定理 2.6 が, Stanley の定理 1.2(1), (2) に対応する結果である. この最後の章では, 定理 1.2(3) に対応する主張について考察する.

まずは strict 分割の鉤の長さの復習をしよう. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathcal{SP}_n$ に対し, 分割 $D(\lambda) \in \mathcal{P}_{2n}$ を, フロベニウス記法で

$$D(\lambda) = [\lambda_1, \ldots, \lambda_l \mid \lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_l - 1]$$

と定義し, λ の double とよぶ. $D(\lambda)$ のヤング図形, つまり $Y(D(\lambda))$ も $D(\lambda)$ で表すことにする. 箱 $u \in S(\lambda)$ および $u \in D(\lambda)$ の鉤の長さ $h_\lambda(u)$ は, ヤング図形 $D(\lambda)$ の中での鉤の長さで定義する.

例 5.1. $\lambda = (5,4,2,1) \in \mathcal{SP}_{12}$ とする．このとき $D(\lambda) = [5,4,2,1 \mid 4,3,1,0]$ である．

$S(\lambda) =$ , $D(\lambda) =$ 

ヤング図形 $D(\lambda)$ の鉤の長さを箱に書き込むと，

$\underline{10}$	9	7	6	5	2
$\underline{9}$	$\underline{8}$	6	5	4	1
$\underline{7}$	$\underline{6}$	$\underline{4}$	3	2	
$\underline{6}$	$\underline{5}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	1	
$\underline{2}$	$\underline{1}$				

となる．ただし，$S(\lambda)$ に属さない箱の数字には下線をつけた．

hook length formula (1.1) の「strict 版」は次のようになる：

$$g^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{u \in S(\lambda)} h_\lambda(u)}.$$

分母の積は $D(\lambda)$ でなく $S(\lambda)$ の箱を渡ることに注意．

補題 5.2. $\lambda \in \mathcal{SP}$, $l = \ell(\lambda)$ とする．このとき次の *2* つの等式が多重集合として成立する．

$$\begin{aligned} &\{h_\lambda(u) \mid u \in S(\lambda)\} \cup \{\lambda_i - \lambda_j \mid 1 \le i < j \le l\} \\ &= \{\lambda_i + \lambda_j \mid 1 \le i < j \le l\} \cup \{1,2,\ldots,\lambda_i \mid i = 1,2,\ldots,l\}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} &\{h_\lambda(u) \mid u \in D(\lambda)\} \cup \{\lambda_1,\ldots,\lambda_l\} \\ &= \{h_\lambda(u) \mid u \in S(\lambda)\} \cup \{h_\lambda(u) \mid u \in S(\lambda)\} \cup \{2\lambda_1,\ldots,2\lambda_l\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

例 5.3. 例 *5.1* の $\lambda = (5,4,2,1)$ を考える．式 (5.1) と (5.2) を具体的に書き下すとそれぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned} &\{1,1,2,2,3,4,5,5,6,6,7,9\} \cup \{1,1,2,3,3,4\} \\ &= \{3,5,6,6,7,9\} \cup \{1,1,1,1,2,2,2,3,3,4,4,5\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{1,1,1,2,2,2,2,3,3,4,4,5,5,5,6,6,6,6,7,7,8,9,9,10\} \cup \{1,2,4,5\} \\ &= \{1,1,2,2,3,4,5,5,6,6,7,9\} \cup \{1,1,2,2,3,4,5,5,6,6,7,9\} \cup \{2,4,8,10\}. \end{aligned}$$

□

5.2 2種類の hook evaluation

対称関数 $f \in \Lambda$ に対し, $\mathcal{SP}$ 上の関数 f^{HS} と f^{HD} を

$$f^{\mathrm{HS}}(\lambda) = f(h_\lambda(u)^2 \ : \ u \in S(\lambda)), \qquad f^{\mathrm{HD}}(\lambda) = f(h_\lambda(u)^2 \ : \ u \in D(\lambda)) \qquad (\lambda \in \mathcal{SP})$$

と定義する. $f^{\mathrm{HS}} \in \Lambda \setminus \Gamma$ かつ $f^{\mathrm{HD}} \in \Gamma$ であることを示そう.

まずは数論でよく登場するベルヌーイ数を用意する. ベルヌーイ数 $\{B_t\}_{t\geq 0}$ は次の式で帰納的に決まる有理数である.

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{k=0}^{t} (-1)^k \binom{t+1}{k} B_k = 0 \quad (t = 1, 2, \ldots).$$

例えば, $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$. n が3以上の奇数ならば $B_n = 0$ となることが知られている. ここでは次の積和の公式を用いる: 任意の自然数 n に対し,

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{1}{k+1} \sum_{t=0}^{k} \binom{k+1}{t} B_t n^{k+1-t}. \tag{5.3}$$

命題 5.4. べき和対称関数 $f = p_k$ に対し, $p_k^{\mathrm{HS}}, p_k^{\mathrm{HD}}$ は次のように明示的に書ける.

$$\begin{aligned} p_k^{\mathrm{HS}} = & \left(\frac{1}{2} - 2^{2k-1}\right) p_{2k} + \sum_{s=0}^{k-1} \binom{2k}{2s+1} p_{2k-2s-1} p_{2s+1} \\ & + \frac{1}{2k+1} \sum_{t'=0}^{k} \binom{2k+1}{2t'} B_{2t'} p_{2k-2t'+1}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$p_k^{\mathrm{HD}} = 2 \sum_{s=0}^{k-1} \binom{2k}{2s+1} p_{2k-2s-1} p_{2s+1} + \frac{2}{2k+1} \sum_{t'=0}^{k} \binom{2k+1}{2t'} B_{2t'} p_{2k-2t'+1}. \tag{5.5}$$

したがって, $f^{\mathrm{HS}}(\lambda), f^{\mathrm{HD}}(\lambda)$ は $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ に関して対称多項式であり, さらに $f^{\mathrm{HS}} \notin \Gamma$ かつ $f^{\mathrm{HD}} \in \Gamma$ である.

証明. (5.1) より,

$$p_k^{\mathrm{HS}}(\lambda) = \sum_{u \in S(\lambda)} h_\lambda(u)^{2k} = \sum_{1 \leq i < j \leq l} \{(\lambda_i + \lambda_j)^{2k} - (\lambda_i - \lambda_j)^{2k}\} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\lambda_i} j^{2k}$$

となる. 右辺において, 第1の $\sum$ の各項は2項展開をして, 第2の $\sum$ には (5.3) を適用すると,

$$\begin{aligned} p_k^{\mathrm{HS}}(\lambda) &= \sum_{1 \leq i < j \leq l} \sum_{s=0}^{k-1} 2 \binom{2k}{2s+1} \lambda_i^{2k-2s-1} \lambda_j^{2s+1} + \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{2k+1} \sum_{t=0}^{2k} \binom{2k+1}{t} B_t \lambda_i^{2k+1-t} \\ &= \sum_{s=0}^{k-1} \binom{2k}{2s+1} (p_{2k-2s-1}(\lambda) p_{2s+1}(\lambda) - p_{2k}(\lambda)) + \frac{1}{2k+1} \sum_{t=0}^{2k} \binom{2k+1}{t} B_t p_{2k+1-t}(\lambda) \end{aligned}$$

を得る．ここで $\sum_{1\le i<j\le l}(\lambda_i^r\lambda_j^s+\lambda_j^r\lambda_i^s)=p_r(\lambda)p_s(\lambda)-p_{r+s}(\lambda)$ となることを用いた．最後の $\sum_t$ は，B_t が $t=1$ のとき及び t が偶数のときのみ生き残ることに注意して整理すると，(5.4) が得られる．(5.2) より $p_k^{\mathrm{HD}}=2p_k^{\mathrm{HS}}+(4^k-1)p_{2k}$ なので，(5.4) から (5.5) が直ちに得られ，特に $p_k^{\mathrm{HD}}\in\Gamma$ が分かる．残る主張は $\Lambda=\mathbb{Q}[p_1,p_2,\ldots]$ であることからしたがう． □

例 5.5.

$$p_1^{\mathrm{HS}}=\frac{1}{3}p_3+2p_1^2+\frac{1}{6}p_1-\frac{3}{2}p_2 \qquad p_1^{\mathrm{HD}}=\frac{2}{3}p_3+4p_1^2+\frac{1}{3}p_1,$$

$$p_2^{\mathrm{HS}}=\frac{1}{5}p_5+8p_3p_1+\frac{1}{3}p_3-\frac{1}{30}p_1-\frac{15}{2}p_4, \qquad p_2^{\mathrm{HD}}=\frac{2}{5}p_5+16p_3p_1+\frac{2}{3}p_3-\frac{1}{15}p_1.$$

□

注意 5.6. 命題 *5.4* の証明と全く同様にして，$h_\lambda(u)$ を *2* 乗しない形の $f(h_\lambda(u)\ :\ u\in S(\lambda))$ および $f(h_\lambda(u)\ :\ u\in D(\lambda))$ も共に対称関数であることが示せる．ただしいずれも Γ には属さない．

5.3 Hook evaluation の多項式性

次の定理は [HX2, Theorem 2.6] で与えられている．ここでは命題 5.4 を利用して定理 2.2 に帰着させる証明を与えよう．

定理 5.7 ([HX2])**.** 任意の $f\in\Lambda$ に対して，

$$\mathbb{E}_n[f^{\mathrm{HD}}]=\sum_{\lambda\in\mathcal{SP}_n}\frac{2^{n-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{n!}f(h_\lambda(u)^2\ :\ u\in D(\lambda))$$

は n の多項式である．さらに，$f=p_\eta$ $(\eta\in\mathcal{P})$ のとき，n の多項式 $\mathbb{E}_n[p_\eta^{\mathrm{HD}}]$ の次数は高々 $|\eta|+\ell(\eta)$ である．

証明．前半の主張は $f^{\mathrm{HD}}\in\Gamma$ であること（命題 5.4）と定理 2.2 より明らかである．後半を示そう．(5.5) において Γ の第 3 の次数 $\deg'$ を考えると，$\deg'(p_{2r-1})=r$ だったので，$\deg'(p_k^{\mathrm{HD}})=k+1$ が分かる．よって $\deg'(p_\eta^{\mathrm{HD}})=|\eta|+\ell(\eta)$ となるから，命題 4.10 より $\mathbb{E}_n[p_\eta^{\mathrm{HD}}]$ の次数は高々 $|\eta|+\ell(\eta)$ である． □

命題 4.11 と定理 1.2 を見比べると，f^{HD} ではなく f^{HS} を考えたいところなのだが，$f^{\mathrm{HS}}\notin\Gamma$ なので $\mathbb{E}_n[f^{\mathrm{HS}}]$ が n の多項式になることは期待できない．

最後に，次の岡田-Panova の等式 [P]

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n}\frac{(f^\lambda)^2}{n!}\sum_{u\in Y(\lambda)}\prod_{i=1}^{r}(h_\lambda(u)^2-i^2)=\frac{1}{2(r+1)^2}\binom{2r}{r}\binom{2r+2}{r+1}n^{\downarrow(r+1)} \qquad (r=0,1,2,\ldots)$$

が知られている．この式の「strict 分割版」，つまり命題 4.11 の「hook length 版」はどのような式だろうか．

参考文献

[B] A.M. Borodin, Multiplicative central measures on the Schur graph, *J. Math. Sci.* **96** (1999), 3472–3477.

[DF] M. Dołęga and V. Féray, Gaussian fluctuations of Young diagrams and structure constants of Jack characters, *Duke Math. J.* **165** (2016), 1193–1282.

[HX1] G.-N. Han and H. Xiong, New hook-content formulas for strict partitions, In DMTCS proc. BC (FPSAC 2016), pages 635–646, 2016. ArXiv:1511.02829v1.

[HX2] G.-N. Han and H. Xiong, Polynomiality of some hook-content summations for double distinct and self-conjugate partitions, ArXiv:1601.04369v1.

[HH] P.N. Hoffman and J.F. Humphreys, *Projective Representations of the Symmetric Groups. Q-Functions and Shifted Tableaux.* Oxford Mathematical monographs. Oxford Science Publications, 1992.

[I] V.N. Ivanov, Dimensions of skew-shifted Young diagrams and projective characters of the infinite symmetric group, *J. Math. Sci.* **96** (1999), 3517-3530.

[Mac] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, second ed., Oxford University Press, Oxford, 1995.

[M] S. Matsumoto, Polynomiality of shifted Plancherel averages and content evaluations. Accepted: *Annales Mathématiques Blaise Pascal* (2017). ArXiv:1512.04168v3.

[松本] 松本詔, Jucys-Murphy 元を変数とする対称関数, 数理解析研究所講究録 no. 1770 (2011), 35–51.

[岡田] 岡田聡一, 古典群の表現論と組合せ論（上・下）, 培風館, 2006.

[O] G. Olshanski, Plancherel averages: Remarks on a paper by Stanley, *Elec. J. Comb.* **17** (2010), #R43, 16 pages.

[P] G. Panova, Polynomiality of some hook-length statistics, *Ramanujan J.* **27** (2012), 349–356.

[St] R.P. Stanley, Some combinatorial properties of hook lengths, contents, and parts of partitions, *Ramanujan J.* **23** (2010), 91–105.

[VS] A.M. Vershik and A.N. Sergeev, A new approach to the representation theory of the symmetric groups IV. $\mathbb{Z}_2$-graded groups and algebras; projective representations of the group S_n, *Mosc. Math. J.* **8** (2008), 813–842.